Cayley-Graphen

im Rahmen des Seminars „Überlagerungen und Gruppenwirkungen“*

Jan-Philipp Litza

Wintersemester 2013/14

Im Folgenden befassen wir uns mit dem Zusammenhang zwischen Gruppen und topologischen Räumen im Sinne der Cayley-Graphen und -Komplexe. Hierbei ist G sofern nicht anders angegeben stets eine beliebige Gruppe und $S = \{g_i \mid i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ ein Erzeugendensystem von G.

Definition (Cayley-Graph)**.** Man konstruiert den (gerichteten) *Cayley-Graphen* $\mathrm{Cay(G, S)}$ zur Gruppe G und dessen Erzeugendensystem S, indem man jedes Gruppenelement als Knoten betrachtet ($V = G$) und eine Kante von $h_1 \in G$ zu $h_2 \in G$ einfügt, falls es ein $g \in S$ gibt, sodass h_2 durch Multiplikation von *rechts* mit g aus h_1 entsteht:

$$E = \{(h_1, h_2) \mid \exists g \in S : h_1 g = h_2\}.$$

Bemerkung. Die Definition des Cayley-Graphen als gerichteter Graph wie wir sie hier verwenden findet sich beispielsweise in [Hat13]. In der Literatur finden sich aber auch Definitionen des Cayley-Graphen als ungerichteter Graph (beispielsweise in [Lö11]), bei dem es beispielsweise für erzeugende Elemente der Ordnung 2 nur eine Kante von g zwischen h gibt, anstatt wie in der gerichteten Version eine von g nach h und eine zurück. Die gerichtete Version ist aber eleganter im Bezug auf freie Gruppen, wie sich in Satz 4 auf Seite 5 zeigt.

Beispiel (Symmetrische Gruppe S_3)**.** Anhand der symmetrischen Gruppe sieht man sehr einfach, dass der Cayley-Graph nicht nur von der Gruppe G (in diesem Fall $G = S_3$), sondern auch vom Erzeugendensystem S abhängt:

Wählt man als Erzeugendensystem $S = \{(12), (23)\}$, so erhält man als Cayley-Graphen $\mathrm{Cay(G, S)}$ sechs abermals zum Kreis verknüpfte Kreise der Länge 2 wie in Abbildung 1(a) auf der nächsten Seite dargestellt.

Wählt man hingegen $S = \{(12), (123)\}$, so erhält man zwei Kreise der Länge 3 die durch drei Kreise der Länge 2 verbunden werden, wie in Abbildung 1(b) auf der nächsten Seite zu sehen.

Cayley-Graphen haben einige schöne Eigenschaften. Beispielsweise ist leicht zu sehen, dass jeder Knoten pro Element im Erzeugendensystem eine abgehende sowie pro Inversen eine ankommende Kante hat. Von besonderem Interesse sind aber die Kreise im Cayley-Graphen einer Gruppe:

Satz 1. *Sei $\langle S \mid R\rangle$ eine Präsentation von G mit (minimalen) Relationen $R = \{r_1, r_2, \ldots\}$. Dann gibt es eine Bijektion zwischen den Kreisen in* $\mathrm{Cay(G, S)}$ *und der Menge $R \times G$, also den Relationen r_i, beginnend in jedem Knoten.*

---

*1. Überarbeitete Version

(a) $S = \{(12), (23)\}$

(b) $S = \{(12), (123)\}$

Abbildung 1: Cayley-Graphen der S_3 für zwei verschiedene Erzeugendensysteme S.

Beweis. Wähle eine beliebige Relation $r_i \in R$, dann ist diese der Form $g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_n} = e$, sowie einen Startknoten $g \in G$. Cay(G, S) enthält dann offensichtlich einen Weg

$$((g, gg_{i_1}), (gg_{i_1}, gg_{i_1}g_{i_2}), \ldots, (gg_{i_1}g_{i_2} \cdots g_{i_{n-1}}, gg_{i_1}g_{i_2} \cdots g_{i_{n-1}}g_{i_n}))$$

da alle Elemente g_{i_j} für $j \in \{1, \ldots, n\}$ im Erzeugendensystem S enthalten sind und somit Kanten von jedem Element h zu hg_{i_j} existieren. Durch die Relation ist die letzte Kante des Weges aber gleich $(gg_{i_1}g_{i_2} \cdots g_{i_{n-1}}, g)$, also ist der Weg ein Zyklus. Angenommen, es gäbe nun zwei Knoten $gg_{i_1} \cdots g_{i_k}$ und $gg_{i_1} \cdots g_{i_l}$, die gleich sind, dann ließe sich die Relation aufteilen in $g_{i_{k+1}} \cdots g_{i_l} = e$ und $g_{i_{l+1}} \cdots g_{i_n} g_{i_1} \cdots g_{i_k} = e$ und wäre somit nicht minimal.

Umgekehrt gilt für jeden Kreis $((h_1, h_2), (h_2, h_3), \ldots, (h_{n-1}, h_n))$ mit $h_1 = h_n$, dass $h_{j+1} = h_j g_{k_j}$ mit $g_{k_j} \in S$, da dies die Bedingung dafür ist, dass Kanten existieren. Somit lässt sich die letzte Kante (h_{n-1}, h_n) schreiben als

$$(\underbrace{h_1 g_{k_1} g_{k_2} \cdots g_{k_{n-1}}}_{=h_{n-1}}, \underbrace{h_1 g_{k_1} g_{k_2} \cdots g_{k_{n-1}} g_{k_n}}_{=h_n = h_1})$$

Somit muss $g_{k_1} g_{k_2} \cdots g_{k_n} = e$ sein und auch zu jedem Kreis existiert eine Relation zu einem Startknoten h_1.

Konstruieren wir aus diesem Paar aus Relation und Startknoten wie im ersten Teil des Beweises wieder einen Kreis, ergibt sich genau der Kreis $((h_1, h_2), (h_2, h_3), \ldots, (h_{n-1}, h_n))$, sodass die Abbildungen zueinander invers sind und somit bijektiv. $\square$

Beispiel (Symmetrische Gruppe S_3)**.** Sei

$$G = S_3 = \langle (12), (123) \mid (12)^2, (123)^3, (12)(123)(12)(123) \rangle$$

Dann gehören zu den Relationen und dem Knoten (12) die in Abbildung 2 auf der nächsten Seite farbig markierten Kreise.

Definition (Cayley-Komplex)**.** Wir konstruieren aus Cay(G, S) einen 2-dimensionalen (ungerichteten) CW-Komplex $\mathrm{Cay}_{\mathrm{CW}}(\mathrm{G}, \mathrm{S})$, indem wir eine 2-Zelle an jeden Kreis an jedem Startknoten kleben (welche nach Satz 1 auf der vorherigen Seite den Relationen entsprechen). Dabei können mehrere 2-Zellen an dieselben 1-Zellen geklebt werden, da alle Kreise/Relationen an jedem Knoten betrachtet werden. Dieser CW-Komplex heißt auch *Cayley-Komplex*.

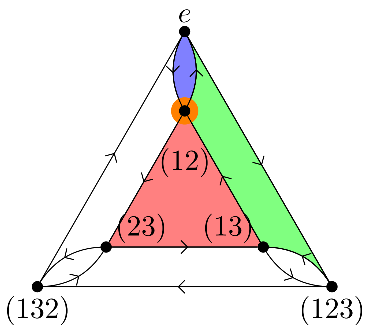

Abbildung 2: Kreise am Knoten e die zu Relationen der Gruppe $S_3 = \langle(12), (123)\rangle$ gehören.

Bemerkung. Während der Cayley-Komplex selbst ungerichtete Kanten/2-Zellen enthält (da in CW-Komplexen keine Definition von Zellenorientierung vorhanden ist), liegt natürlich noch immer der Cayley-Graph zugrunde, sodass wir häufig dennoch eine Orientierung der Kanten annehmen. In diesem Fall stammt sie aus dem Graphen, der offensichtlich das 1-Skelett des Komplexes ist.

Definition. Offensichtlich wirkt G auf $\mathrm{Cay(G, S)}$ durch Multiplikation von *links*, indem $g \in G$ jeden Knoten h auf gh und jede Kante (h, hg_i) auf (gh, ghg_i) abbildet (wobei $g_i \in S$ per Definition von $\mathrm{Cay(G, S)}$). Diese Gruppenwirkung lässt sich stetig fortsetzen auf $\mathrm{Cay_{CW}(G, S)}$, wobei eine 2-Zelle zur Relation r beginnend an h abgebildet wird auf die 2-Zelle zur Relation r an gh, und wir bezeichnen Quotientenraum als $\mathrm{X(G, S)} := \mathrm{Cay_{CW}(G, S)}/G$.

Satz 2. *Die Gruppenwirkung $G \curvearrowright \mathrm{Cay_{CW}(G, S)}$ ist eigentlich diskontinuierlich.*

Beweis. Wähle $g \in G \setminus \{e\}$ fest und lasse es auf $\mathrm{Cay_{CW}(G, S)}$ operieren. Offensichtlich wird jeder Knoten auf einen anderen abgebildet, somit lassen sich auch um jeden Knoten Umgebungen finden, die zu ihrem Bild disjunkt sind. Zu Punkten auf Kanten lassen sich Umgebungen finden, die keine Knoten enthalten, sodass auch sie zu ihrem Bild disjunkt sind. Und schließlich lässt sich zu jedem Punkt in einer 2-Zelle ein Umgebung finden, die keine Kante und keinen Knoten berührt und damit von der Gruppenoperation auf eine andere 2-Zelle mit dem selben Rand abgebildet wird. $\square$

Korollar 3. *Da die Kreise von $\mathrm{Cay(G, S)}$ nach Satz 1 auf Seite 1 gerade den Relationen entsprechen und wir zur Konstruktion von $\mathrm{Cay_{CW}(G, S)}$ auf diese Kreise 2-Zellen geklebt haben, ist $\mathrm{Cay_{CW}(G, S)}$ einfach zusammenhängend.*

Nach dem Vortrag über eigentlich diskontinierliche Gruppenwirkungen ist also $\pi_1(\mathrm{X(G, S)}) = \pi_1(\mathrm{Cay_{CW}(G, S)}/G) = G$, und zwar unabhängig vom Erzeugendensystem S. Außerdem ist

$$\begin{aligned} p : \mathrm{Cay_{CW}(G, S)} &\to \mathrm{X(G, S)} \\ x &\mapsto Gx \end{aligned}$$

eine normale und – da $\mathrm{Cay_{CW}(G, S)}$ einfach zusammenhängend ist – die universelle Überlagerung von $\mathrm{X(G, S)}$.

Bemerkung. Es gibt noch höherdimensionale, einfach zusammenhängende topologische Räume, deren Fundamentalgruppe ebenfalls G ist und deren höherdimensionale Homotopiegruppen zudem alle trivial sind. Dies sind die sogenannten „Classifying spaces“.

Beispiel (Freie Gruppe mit 2 Erzeugern)**.** Sei $G = F(\{a, b\})$ die freie Gruppe mit 2 Erzeugern. Dann ist $\mathrm{X(G, \{a, b\})} = S^1 \vee S^1$, da es zwei Erzeuger und keinerlei Relationen gibt, und

$\mathrm{Cay_{CW}(G,\{a,b\})} = \mathrm{Cay(G,\{a,b\})}$ ist der in Abbildung 3 dargestellte Baum. Die Operation von G auf $\mathrm{Cay(G,\{a,b\})}$ funktioniert so, dass a den Graphen entlang der horizontalen Achse nach rechts verschiebt (also die großen Zweige in der Mitte zu den kleineren am Knoten a werden lässt und die kleineren am Knoten a^{-1} zu den großen in der Mitte), während b auf die selbe Weise entlang der vertikalen Achse nach oben verschiebt.

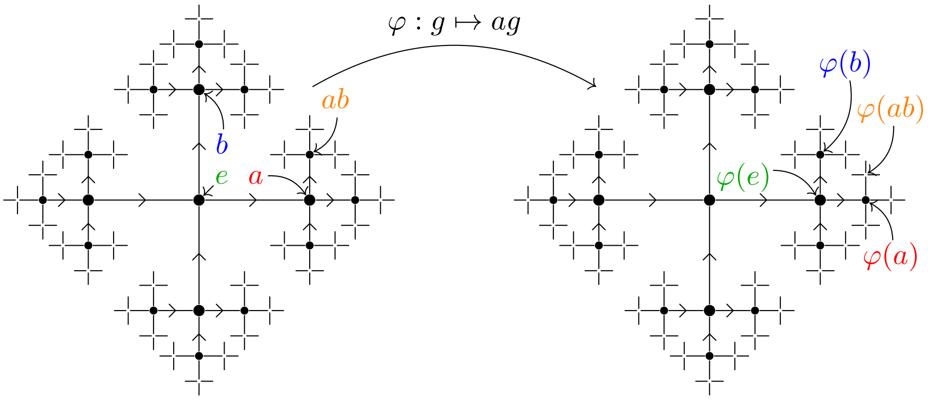

Abbildung 3: Der Cayley-Graph der freien Gruppe $G = F(\{a,b\})$ sowie die Wirkung des Elements a auf dem gesamten Graphen.

Beispiel (Zyklische Gruppe C_2)**.** Sei $G = C_2 = \langle x \mid x^2 \rangle$. Dann hat der Cayley-Graph zwei Knoten e, x die in jeder Richtung mit je einer Kante verbunden sind, also $\mathrm{Cay(C_2,\{x\})} \cong S^1$. Für den Cayley-Komplex werden an diese beiden Kanten zwei 2-Zellen angeklebt: Einmal bei e startend und einmal bei x startend, sodass $\mathrm{Cay_{CW}(C_2,\{x\})} \cong S^2$. Dies entspricht einer der an e grenzenden Kugeln in Abbildung 4.

Durch die Gruppenoperation werden die beiden Kanten zu einer identifiziert, ebenso beide 2-Zellen, und die identifizierte 2-Zelle ist doppelt auf die 1-Zelle geklebt, sodass $\mathrm{X(G,S)} = \mathbb{RP}^2$.

Beispiel (Freies Produkt zyklischer Gruppen)**.** Für das freie Produkt zyklischer Gruppen der Ordnung 2 erhält man für den Cayley-Komplex unendlich viele, miteinern verheftete Sphären S^2, deren Äquatoren aus je zwei Kanten bestehen, die abwechselnd zu a und b gehören. Dieses Beispiel ist in Abbildung 4 zu sehen.

Die Operation von ab verschiebt den gesamten Komplex um 2 Sphären nach rechts, während ba um 2 Sphären nach links verschiebt. Ebenso natürlich deren Potenzen.

Die Operation von a bzw. b hingegen dreht den gesamten Komplex um 180° um die vertikale Achse durch den Mittelpunkt der Sphäre zwischen e und a bzw. b.

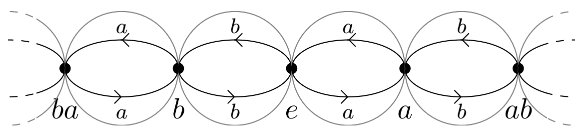

Abbildung 4: Cayley-Komplex von $C_2 * C_2 = \langle a \rangle * \langle b \rangle$ in grau mit dessen Cayley-Graph in schwarz.

Cayley-Graphen verraten vieles über die Struktur einer Gruppe. Im ersten Beispiel eben haben wir bereits gesehen, dass der Cayley-Graph der freien Gruppe in zwei Erzeugern ein sehr regelmäßiger Baum ist. Tatsächlich sind die Cayley-Graphen aller freien Gruppen Bäume und sogar umgekehrt:

Satz 4. *Eine Gruppe G ist genau dann die freie Gruppe erzeugt von S, wenn der dazugehörige Cayley-Graph* $\mathrm{Cay}(\mathrm{G}, \mathrm{S})$ *ein Baum ist.*

Beweis. Wenn man sich bewusst macht, dass freie Gruppen keinerlei Relationen unterliegen, ergibt sich diese Aussage direkt aus Satz 1 auf Seite 1. □

Bemerkung. Während auch bei ungerichteten Cayley-Graphen die Graphen von freien Gruppen Bäume sind, ist die Umkehrung dort nicht immer richtig. Beispielsweise wäre $\mathrm{Cay}(\mathrm{C}_2, 1)$ ein Baum (zwei Knoten verbunden durch eine Kante), aber offensichtlich nicht frei.

Desweiteren ist der Beweis etwas komplizierter, weil man gleichzeitig auch immer die Inversen Elemente der Erzeuger beachten muss, da diese ebensogut eine Kante zwischen zwei Kanten erzeugen könnten. Dies entfällt bei der gerichteten Version, da diese Kanten entgegen der Richtung des Kreises zeigen würden.

Literatur

[Hat13] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, Cambridge, online edition, abgerufen 2013. URL: `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`.

[Lö11] Clara Löh. *Geometric group theory, an introduction.* Universität Regensburg, 2011. URL: `http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/`.