

Seminar Algebra: Spiegelungsgruppen (WiSe 2011/12)

# Coxeter Graphen

Zerlegung in irreduzible Komponenten, Coxeter Graphen, bilineare Formen

Jan-Philipp Litza

13. März 2012

Universität Bremen

# Coxeter-Graphen

Vorherige Vorträge haben gezeigt, dass jede endliche *Spiegelungsgruppe*  $W$  ein *einfaches (Wurzel-) System*  $\Delta$  besitzt und dass für ein festes einfaches System die Spiegelungsgruppe erzeugt wird von

$$S := \{s_\alpha : \alpha \in \Delta\}$$

mit den Relationen

$$(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1 \quad (\alpha, \beta \in \Delta)$$

Um diese Präsentation kompakter darzustellen und die Spiegelungsgruppen selbst zu klassifizieren benutzen wir Graphen:

**Definition.** Sei  $W$  eine endliche Spiegelungsgruppe mit einem einfachem Wurzelsystem  $\Delta$  und Relationen  $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1$  ( $\alpha, \beta \in \Delta$ ). Ein Graph  $\Gamma = (V, E)$  mit Kantengewichtung  $g : E \rightarrow \mathbb{N}$  heißt *Coxeter-Graph* von  $W$ , falls

- eine Bijektion  $v : V \rightarrow \Delta$  existiert und
- $(\alpha, \beta) \in E \Leftrightarrow m(v(\alpha), v(\beta)) \geq 3$  und
- $g((\alpha, \beta)) = m(v(\alpha), v(\beta)) \quad \forall \alpha, \beta \in V$ .

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des einfachen Systems  $\Delta$ , da ein anderes einfaches System  $\Delta'$  sich mit einem festen  $w \in W$  darstellen lässt als  $\Delta' = w\Delta$ , also offensichtlich gleichmächtig ist und die Relationen übernimmt:

$$(s_{w\alpha} s_{w\beta})^{m(\alpha, \beta)} = (w s_\alpha w^{-1} w s_\beta w^{-1})^{m(\alpha, \beta)} = w (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} w^{-1} = 1$$

**Beispiele.** Der Graph der Diedergruppe  $I_m$  besteht nur aus 2 Knoten und einer  $m$ -Kante:

•  $\overset{m}{\text{---}}$  •. Der Graph der symmetrischen Gruppe  $S_{n+1}$  ist ein  $n$  Knoten langer Weg und jede

Kante hat ein Gewicht von 3: •  $\overset{3}{\text{---}}$  •  $\overset{3}{\text{---}}$  • - - •  $\overset{3}{\text{---}}$  •

**Proposition.** *Es seien  $W_1, W_2$  essentielle endliche Spiegelungsgruppen auf den euklidischen Räumen  $V_1$  respektive  $V_2$ . Wenn  $W_1$  und  $W_2$  den selben Coxeter-Graphen besitzen, existiert eine isometrische Bijektion zwischen  $V_1$  und  $V_2$ , die einen Isomorphismus von  $W_1$  nach  $W_2$  induziert.*

*Beweis.* Wir fixieren einfache Wurzelsysteme aus Einheitsvektoren  $\Delta_1, \Delta_2$  von  $W_1, W_2$ . Da beide Gruppen den selben Coxeter-Graphen besitzen, existiert eine zum Graphen „kompatible“ Bijektion  $\varphi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  (sodass  $\alpha \in \Delta_1$  und  $\varphi(\alpha) \in \Delta_2$  dem selben Knoten im Graphen entsprechen). Weil  $W_1, W_2$  nach Annahme essentiell sind, bilden  $\Delta_1, \Delta_2$  eine Basis von  $V_1$  respektive  $V_2$  und ermöglichen somit die lineare Erweiterung von  $\varphi$  auf ganz  $V_1 \rightarrow V_2$ . Es bleibt die Isometrie zu zeigen:

Der Winkel zwischen zwei einfachen Wurzeln  $\alpha, \beta \in \Delta_1$ ,  $\alpha \neq \beta$ , ist  $\theta = \pi - \pi/m_1(\alpha, \beta)$ , da  $s_\alpha s_\beta$  eine Drehung um den Winkel  $2(\pi - \theta)$  ist und da  $m(\alpha, \beta)$  minimal ist sodass  $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1$

gilt. Somit gilt:

$$(\alpha, \beta) = \cos \theta = -\cos(\pi/m_1(\alpha, \beta)). \quad (1)$$

Da  $\varphi$  kompatibel zum Coxeter-Graphen ist, gilt  $m_2(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = m_1(\alpha, \beta)$  und somit gilt (1) auch für  $\alpha, \beta \in \Delta_2$ , insbesondere  $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (\alpha, \beta)$ . Also ist  $\varphi$  isometrisch.  $\square$

Dieses Resultat zeigt uns, dass wir zur Klassifizierung der endlichen Spiegelungsgruppen bis auf Isomorphie nur deren Coxeter-Graphen betrachten müssen. Dies wird noch einfacher, wenn wir uns nur auf zusammenhängende Graphen beschränken können:

**Definition.** Eine Spiegelungsgruppe mit zusammenhängendem Coxeter-Graphen heißt *irreduzibel*.

**Definition.** Sei  $W$  eine endliche Spiegelungsgruppe mit einem einfachen System  $\Delta$  und den dazugehörigen Spiegelungen  $S$ . Für eine Teilmenge  $I \subset S$  ist  $W_I$  die von den Spiegelungen  $s_\alpha \in I$  erzeugte Untergruppe von  $W$ , genannt die *parabolische Untergruppe* von  $W$  zu  $I$ .

**Proposition.** Sei  $(W, S)$  ein Coxeter-System, dessen Coxeter-Graphen  $\Gamma$  aus den Zusammenhangskomponenten  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$  besteht. Wenn  $S_1, \dots, S_r \subset S$  die Mengen der jeweils zu den Knoten gehörigen Spiegelungen sind, dann ist  $W$  das direkte Produkt der parabolischen Untergruppen  $W_{S_1}, \dots, W_{S_r}$  und jedes Coxeter-System  $(W_{S_i}, S_i)$  ist irreduzibel.

*Beweisskizze.* Da die Elemente zweier verschiedener Teilmengen  $S_i$  und  $S_j$  miteinander kommutieren, bilden die  $W_{S_i}$  Normalteiler in  $W$ . Außerdem ist damit  $S$  im Komplexprodukt der  $W_{S_i}$  enthalten, und da das Komplexprodukt wieder eine Gruppe ist gilt  $W = \langle S \rangle \subseteq \prod_{i=1}^r W_{S_i}$ . Um zu zeigen, dass der Schnitt über die Untergruppen nur die Identität enthält, verwenden wir eine Induktion über  $r$ : Für  $r = 1$  ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Per Induktionsannahme ist dann  $W_{S \setminus S_i} = \bigotimes_{j=1}^{r-1} W_{S_j}$ . Eine frühere Proposition liefert uns dann, dass

$$W_{S \setminus S_i} \cap W_{S_i} = \{id\}.$$

Somit ist das Komplexprodukt der Untergruppen direkt, da es die gesamte Gruppe umfasst, der Schnitt der Untergruppen trivial ist und alle Untergruppen normal sind.  $\square$

Das Konzept des Coxeter-Graphen von Spiegelungsgruppen lässt sich durch leichte Abwandlung verallgemeinern, sodass wir Coxeter-Graphen losgelöst von Spiegelungsgruppen betrachten können.

**Definition.** Ein *Coxeter-Graph* sei ein endlicher, ungerichteter Graph dessen Kanten gewichtet sind mit natürlichen Zahlen  $\geq 3$  oder dem Symbol  $\infty$ . Wenn  $S$  die Menge der Knoten ist, dann sei  $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  die Zuordnung der Kantengewichte, wobei  $m(s, s) := 1$  und für nicht-adjazente  $s, s' \in S : m(s, s') := 2$ .

**Definition.** Die symmetrische *Coxeter-Matrix*  $(a_{i,j})_{i,j \in S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zu so einem Coxeter-Graphen ist dann gegeben durch

$$a_{s,s'} := -\cos(\pi/m(s, s')).$$

**Definition.** Ein Coxeter-Graph heißt *positiv (semi)definit*, wenn die zugehörige Coxeter-Matrix es ist (wenn also alle ihre Hauptminoren nichtnegativ bzw. positiv sind, da Coxeter-Matrizen alle symmetrisch sind).

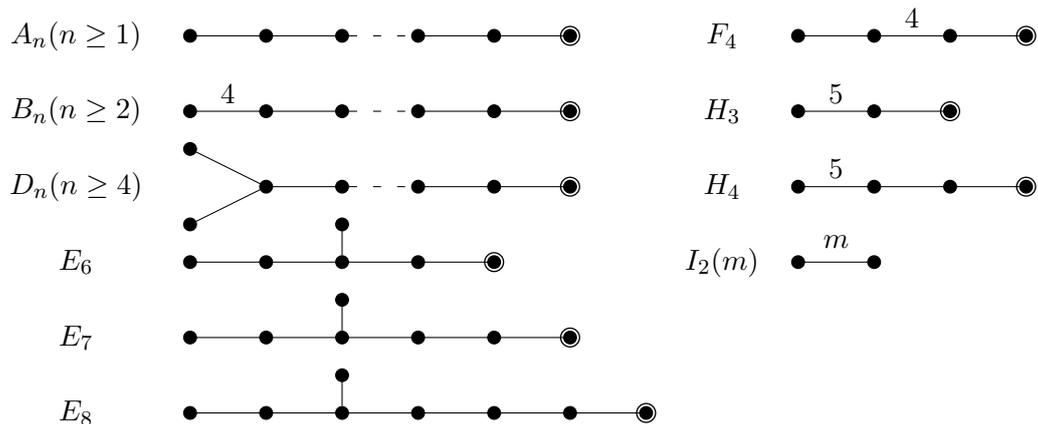


Abbildung 1: Einige Beispiele positiv definiter Graphen

**Proposition.** *Der Coxeter-Graph einer endlichen Spiegelungsgruppe ist positiv definit.*

*Beweis.* Wir wählen uns zu der endlichen Spiegelungsgruppe  $W$  ein einfaches System  $\Delta = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , welches nur aus Einheitsvektoren bestehen soll. Falls dies noch keine Basis von  $\mathbb{R}^n$  ist (also  $m < n$ ), erweitern wir sie um orthonormale Vektoren  $v_{m+1}, \dots, v_n$ . Dann ist für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\tilde{x} = (v_1 | \dots | v_n) \cdot x$$

der in die Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  transformierte Vektor  $x$ . Wir betrachten das Standardskalarprodukt in dieser Basis:

$$\begin{aligned} (\tilde{x}^\top) \cdot \tilde{x} &= x^\top \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 | \dots | v_n) \cdot x \\ &= x^\top \cdot \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & \cdots & (v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_n, v_1) & \cdots & (v_n, v_n) \end{pmatrix} \cdot x \end{aligned}$$

Aus (1) wissen wir, dass  $(v_i, v_j) = -\cos(\pi/m(v_i, v_j))$ , sodass die Matrix hier gerade die Coxeter-Matrix der Spiegelungsgruppe ist. Da wir aber von einem Standardskalarprodukt ausgegangen sind, und dieses immer positiv definit ist, ist auch unsere Coxeter-Matrix als Hauptminor dieser symmetrischen Matrix positiv definit.  $\square$

## Klassifizierung

Da wir nun wissen, dass jede Klasse von isomorphen Spiegelungsgraphen eine positiv definite Coxeter-Graphen hat, lohnt es sich, verschiedene positiv definite Coxeter-Graphen zu betrachten, um diesen dann Klassen von Spiegelungsgruppen zuordnen zu können. Wir betrachten daher die Graphen in Abbildung 1 und zeigen, dass sie allesamt positiv definit sind.

Dazu betrachten wir die Hauptminoren der zugehörigen Coxeter-Matrizen. Es fällt auf, dass bei geeigneter Nummerierung der Knoten jeder Hauptminor selbst wieder die Determinante eines in Abbildung 1 gezeigten Graphen ist, sodass es durch Induktion ausreicht, für jeden gezeigten Typen die Determinante der gesamten Coxeter-Matrix  $A$  zu berechnen. Um den häufig auftretenden Faktor  $\frac{1}{2}$  zu eliminieren berechnen wir jedoch  $\det 2A$ . Dies ist im Falle kleiner Graphen mit nur 2 Knoten einfach:

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{m}): \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \cos(\pi/m) \\ -2 \cos(\pi/m) & 2 \end{pmatrix} = 4 - 4 \cos^2(\pi/m) = 4 \sin^2(\pi/m) > 0$$

Im Falle größerer Graphen  $n \geq 3$  fällt auf, dass man durch entsprechende Nummerierung der Knoten erreichen kann, dass der Knoten  $n$  immer nur eine Kante besitzt (zum Knoten  $n-1$ ) und diese Kante mit  $m=3$  oder  $m=4$  gewichtet ist. Dadurch ergibt sich für jeden Graphen mit  $n \geq 3$  eine (verdoppelte) Coxeter-Matrix folgender Art:

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * & -2 \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) & 2 \end{pmatrix}$$

Sei  $d_i$  die Determinante der oberen linken  $i \times i$  Teilmatrix und  $A_{i,j}$  die Teilmatrix, die man durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte erhält, dann ergibt die Entwicklung der letzten Zeile:

$$\det 2A = 2 \cdot d_{n-1} + 2 \cos(\pi/m) \cdot \det A_{n,n-1}.$$

Hierbei erhält man durch Entwicklung nach der letzten Spalte

$$\det A_{n,n-1} = -2 \cos(\pi/m) d_{n-2}.$$

Insgesamt gilt also wegen  $4 \cos^2(\pi/3) = 1$  und  $4 \cos^2(\pi/4) = 2$ :

$$\det 2A = 2 \cdot d_{n-1} - (m-2) \cdot d_{n-2}. \quad (2)$$

Damit können wir nun relativ einfach die Determinanten der Graphen aus Abbildung 1 berechnen. Dazu bezeichnen wir formal mit  $\det 2G$  die Determinante der verdoppelten Coxeter-Matrix des Coxeter-Graphen  $G$ :

**A<sub>n</sub>**: Trivialerweise ist  $\det 2A_1 = 2$  und  $\det 2A_2 = \det 2I_2(3) = 4 \sin^2(\pi/3) = 3$ . Damit ist der Induktionsanfang gemacht, und mit (2) gilt

$$\det 2A_n = 2 \det 2A_{n-1} - \det 2A_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1$$

**B<sub>n</sub>**: Wegen  $B_2 = I_2(4)$  ist  $\det 2B_2 = 4 \sin^2(\pi/4) = 2$ . Mit (2) ist dann  $\det 2B_3 = 4 - 2 = 2$  und somit auch für jedes weitere  $n > 3$ :  $\det 2B_n = 2$ .

**D<sub>n</sub>**: Hier lässt sich  $D_n$  für kein  $n \geq 4$  mit einem bereits berechneten Graphen identifizieren. Indem wir die beiden rechten Knoten mit 1 und 2 nummerieren und dann von rechts nach links können wir jedoch direkt unsere Formel (2) anwenden und erhalten

$$\det 2D_4 = 2 \det 2A_3 - \det 2E_2 = 4$$

wobei  $\det 2E_2 = 4$  die Determinante der oberen linken  $2 \times 2$  Teilmatrix ist. Dadurch können wir mit der Hilfsdefinition  $D_3 := A_3$  wieder per Induktion errechnen, dass

$$\det 2D_n = 2 \det 2A_{n-1} - \det 2A_{n-2} = 4$$

**E<sub>6</sub>**: Nummeriert man die Knoten so, dass die beiden rechten Knoten  $n - 1$  und  $n$  werden, so kann man direkt (2) anwenden, da durch Streichen von  $n$  der Graph von  $D_5$  und durch Streichen von  $n - 1$  und  $n$  der Graph von  $A_4$  entsteht:

$$\det 2E_6 = 2 \det 2D_5 - \det 2A_4 = 8 - 5 = 3$$

**E<sub>7</sub>, E<sub>8</sub>**: Analog erhält man durch Streichen des rechten Knotens oder der beiden rechten Knoten hier entweder  $D_5$ ,  $E_6$  oder  $E_7$ , sodass gilt:

$$\det 2E_7 = 2 \det 2E_6 - \det 2D_5 = 6 - 4 = 2$$

$$\det 2E_8 = 2 \det 2E_7 - \det 2E_6 = 4 - 3 = 1$$

**F<sub>4</sub>**: Dieser Graph entsteht durch Hinzufügen eines Knoten zu  $B_3$ , und streicht man bei entsprechender Nummerierung die beiden höchsten Knoten erhält man  $A_2$ , also gilt

$$\det 2F_4 = 2 \det 2B_3 - \det 2A_2 = 4 - 3 = 1$$

**H<sub>3</sub>, H<sub>4</sub>**: Streicht man bei  $H_3$  sukzessive die beiden rechten Knoten, erhält man erst  $I_2(5)$  und dann  $A_1$ :

$$\det 2H_3 = 2 \det I_2(5) - \det 2A_1 = 4 \sin^2(\pi/5) - 2 = 3 - \sqrt{5}$$

Analog erhält man bei  $H_4$  erst  $H_3$  und dann  $I_2(5)$ :

$$\det 2H_4 = 2 \det H_3 - \det I_2(5) = 6 - 2\sqrt{5} - \sin^2(\pi/5) = (7 - 3\sqrt{5})/2$$

Um später zeigen zu können, dass die in Abbildung 1 abgebildeten Graphen die einzigen positiv definiten Coxeter-Graphen sind, betrachten wir nun eine Reihe von positiv semidefiniten Graphen, die aber nicht positiv definit sind. Diese sind in Abbildung 2 abgebildet und entstehen – wie ihre Benennung vermuten lässt – alle durch Hinzufügen eines Knotens (und einer Kante) zu einem Graphen aus Abbildung 1. Der Index  $n$  sagt also bei einem dieser Graphen tatsächlich aus, dass er  $n + 1$  Knoten hat. Für den positiv definiten Graphen  $B_n$  gibt es zwei mögliche Erweiterungen zu einem positiv semidefiniten Graphen, die hier mit  $\tilde{B}_n$  und  $\tilde{C}_n$  bezeichnet sind.

Da also bei geeigneter Nummerierung die Hauptminoren der Graphen aus Abbildung 2 Determinanten von Graphen aus Abbildung 1 sind, und diese somit allesamt echt positiv, müssen wir jetzt nur die Determinanten der Graphen selbst berechnen und zeigen, dass diese 0 sind. Dies ist für  $\tilde{A}_n$  sofort klar, da alle Zeilen und alle Spalten sich zu 0 aufsummieren und die Matrix somit singularär ist. Für alle übrigen Graphen können wir wieder (2) benutzen, da der im Vergleich zum positiv definiten Graphen hinzugekommene Knoten wieder stets mit nur einer Kante mit Gewicht 3 zu einem anderen Knoten verbunden ist.

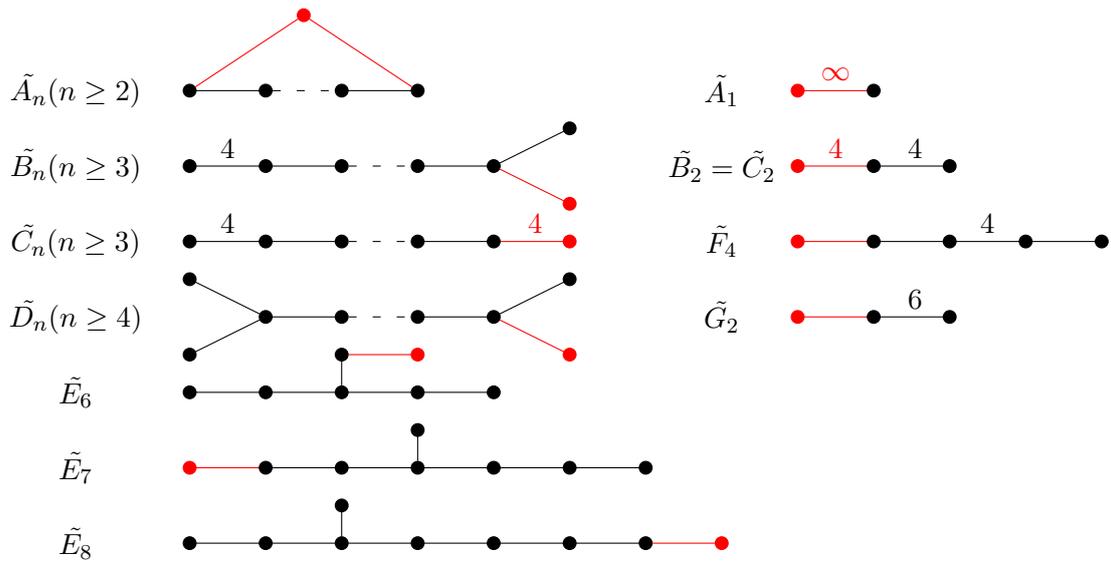


Abbildung 2: Einige Beispiele positiv semidefiniter Graphen. In rot ist jeweils der Unterschied zu den entsprechenden Graphen in Abbildung 1 hervorgehoben.

## Zusammenfassung

Wir wissen nun, dass es bei der Klassifizierung von Spiegelungsgruppen hilfreich ist, die Coxeter-Graphen zu betrachten. Hierbei ist es ausreichend, sich auf die zusammenhängenden Graphen zu beschränken. Die zu diesen Graphen assoziierten Coxeter-Matrizen sind positiv definit, daher haben wir eine Reihe positiv (semi)definiter verallgemeinerter Coxeter-Graphen, ohne ihre eventuell zugehörigen Spiegelungsgruppen, kennengelernt. Es bleibt zu zeigen, dass dies alle positiv semidefiniten (und somit auch alle positiv definiten) Coxeter-Graphen sind, um die Anzahl der Klassen von Spiegelungsgruppen nach oben abschätzen zu können. Ebenfalls bleibt zu zeigen, dass jeder dieser Graphen tatsächlich eine zugehörige Spiegelungsgruppe besitzt.